Cirkuláció időderiváltja

Lássuk be az alábbi azonosságot:

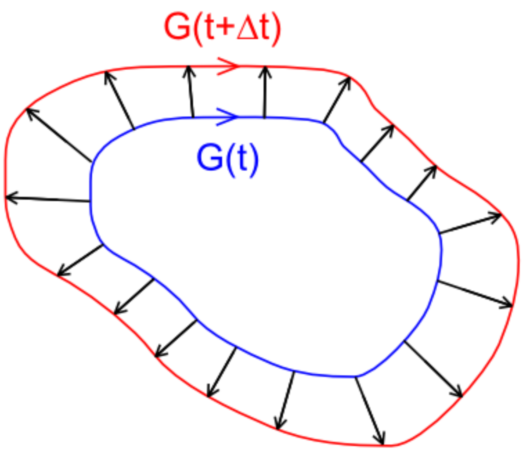
$$\frac{d}{dt}\oint_{G(t)} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{G(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{s}$$

azaz, hogy tetszőleges, sima, időben változó $G(t)$ görbe mentén vett cirkuláció időderiváltja egyenlő az ugyanezen görbe mentén vett gyorsulás cirkulációjával.

Induljunk ki az időbeli deriválás definíció szerinti kifejtéséből:

$$\frac{d}{dt}\oint_{G(t)} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t+\Delta t)\cdot d\mathbf{s} - \oint_{G(t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s}\right]$$

azaz vonjuk ki a kezdeti t időpillanatban szemlélt $G(t)$ görbe mentén a t időpillanatbeli sebességgel vett cirkulációt a Δt infinitezimális idő múlva megváltozott $G(t+\Delta t)$ görbe mentén a megváltozott sebességgel vett cirkulációból és osszuk el ezzel a kis Δt időtartammal, amellyel tartunk nullához. A körüljárás irányának megfordítása a körintegrál előjelének megváltozását eredményezi. Kezdetben legyen mindkét görbe körüljárásának iránya azonos, ahogy ez az alábbi ábrán is látható:



Adjunk hozzá az időderivált felbontott alakjához nullát a következő módon:

$$\frac{d}{dt}\oint_{G(t)} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t+\Delta t)\cdot d\mathbf{s} - \oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s}\right] +$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} - \oint_{G(t)} \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s}\right]$$

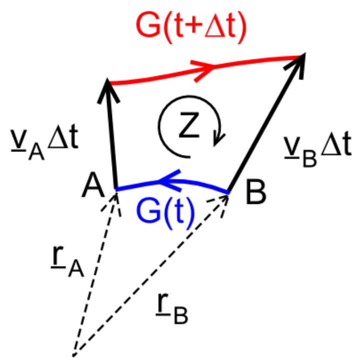
Ha $\Delta t \to 0$, akkor az első limesz a parciális időderiváltat adja meg:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t+\Delta t) \cdot d\mathbf{s} - \oint_{G(t+\Delta t)} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}\right] = \oint_{G(t)} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Tekintsük tehát csak a második limeszt, amelyben a tetszőleges görbe mentén vett cirkulációt a sebességmező által tovasodort görbére vett cirkulációból kell kivonnunk. Az általánosság kedvéért cseréljük ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességvektort tetszőleges $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vektorra, illetve zárt görbe helyett foglalkozzunk véges görbedarabbal. Vegyük a vonalintegrálok különbségét erre a görbedarabra, valamint az elsodort görbedarabra:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{G(t+\Delta t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} - \int_{G(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}\right]$$

A két vonalintegrál különbségét könnyen elképzelhetjük úgy is, mintha az A pontból kiindulva az A pontban vett elmozdulás mentén a $G(t+\Delta t)$ görbén keresztül végighaladnák, majd a B pontban vett elmozdulás mentén visszafelé haladnánk a B ponting, végül a $G(t)$ görbén megfordítanának az eredeti körüljárás irányát és szintén visszafelé haladnánk, amíg visszaérnénk a kiindulási A pontba:

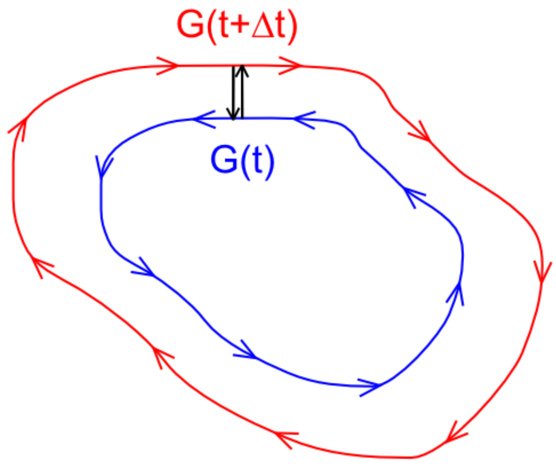


Helyettesítsük tehát az elsodort és az eredeti görbékre vett integrálok különbségét körintegrállal, ahol a görbék végpontjait a $\mathbf{v}_A \Delta t$ és a $\mathbf{v}_B \Delta t$ szakaszok zárják le. Az ezekre vett integrál részeket természetesen le kell vonni a körintegrálból:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{G(t+\Delta t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} - \int_{G(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{Z} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} - (-\mathbf{B}(\mathbf{r}_B) \cdot \mathbf{v}_B \Delta t) - \mathbf{B}(\mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{v}_A \Delta t\right]$$

Ha ezt a görbedarabot kihúzzuk a teljes görbére, akkor a két kompenzáló tag épp egymás ellentettjével lesz egyenlő, a körintegrál értékébe ekkor már nem adnak járulékot.

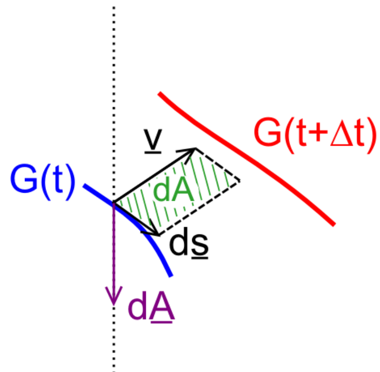


A Stokes-tétel értelmében bármely vektormező zárt görbe mentén vett vonalintegrálja átírható ugyanezen vektormező rotációjának normális (merőleges) irányú komponensének a görbe által körbezárt felületre vett felületi integráljává, esetünkben:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\oint_Z \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{s}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\iint_A \text{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \cdot d\mathbf{A}\right)$$

Az elemi $d\mathbf{A}$ felületelemet előáll a $\mathbf{v} \cdot \Delta t$ vektor és az elemi $d\mathbf{s}$ elmozdulás vektorának vektoriális szorzataként is:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\iint_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\iint_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s})\right)$$



Az ábra azt mutatja, hogy a $(\mathbf{v} \times d\mathbf{s})$ vektoriális szorzat eredményeként kapott $d\mathbf{A}$ vektor hossza a $\mathbf{v}$ és $d\mathbf{s}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, iránya pedig olyan, hogy a $\mathbf{v}, d\mathbf{s}, d\mathbf{A}$ vektor-hármas jobbrendszert alkot. (Az elemi területvektorok összege így előjelhelyesen adja vissza a Stokes-tételben használt felületet.)

A $(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{s})$ szorzatra hármas vegyes-szorzatként is tekinthetünk:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{s}) = (\nabla \times \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{s}) = (\mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{s}, \nabla \times \mathbf{B}) = -\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{B})$$

Térjünk vissza a $\mathrm{G(t)}$ görbére, a vegyes szorzat felbontása ekkor:

$$\int\limits_{\mathrm{G(t)}} (\nabla \times \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathrm{d}\mathbf{s}) = -\int\limits_{\mathrm{G(t)}} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int\limits_{\mathrm{G(t)}} [\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \circ \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Az Einstein-féle szimbolika segítségével ellenőrizhetjük ennek az összefüggésnek a helyességét:

$$[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_{\mathrm{i}} = \varepsilon_{\mathrm{ijk}} \mathrm{v}^{\mathrm{j}} \varepsilon_{\mathrm{klm}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{B}^{\mathrm{m}} = \varepsilon_{\mathrm{ijk}}\, \varepsilon_{\mathrm{lmk}}\, \mathrm{v}^{\mathrm{j}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{B}^{\mathrm{m}} =$$

$$= \left(\delta_{\mathrm{il}}\, \delta_{\mathrm{jm}} - \delta_{\mathrm{im}}\, \delta_{\mathrm{jl}}\right) \mathrm{v}^{\mathrm{j}}\, \partial_{\mathrm{l}} \mathrm{B}^{\mathrm{m}} = \mathrm{v}_{\mathrm{m}}\, \partial_{\mathrm{i}} \mathrm{B}_{\mathrm{m}} - \mathrm{v}_{\mathrm{j}}\, \partial_{\mathrm{j}} \mathrm{B}_{\mathrm{i}}$$

Írjuk vissza a **B** vektor helyére a **v** sebességvektort, és a görbedarab helyett vegyünk zárt görbét, ekkor:

$$-\int\limits_{\mathrm{G(t)}} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\oint\limits_{\mathrm{G(t)}} \frac{1}{2} \nabla(\mathrm{v}^2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint\limits_{\mathrm{G(t)}} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Mivel az első tag nulla, ezért a végső alakban az idő szerinti parciális deriválthoz csak a második tagot kell hozzáadni, így megkapjuk a teljes hidrodinamikai derivált $\mathrm{G(t)}$ zárt görbe mentén vett vonalintegrálját:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \oint\limits_{\mathrm{G(t)}} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint\limits_{\mathrm{G(t)}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint\limits_{\mathrm{G(t)}} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint\limits_{\mathrm{G(t)}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}$$